

V každé úloze 1. – 4. označte své odpovědi postupně podle zadání A, B, C, D, pište je na stejnou stránku pod zadání a oddělte je vhodně opticky, např. pomocí zvýrazněné čáry apod. Případné pomocné výpočty pište na jiný arch, který také podepište a odevzdejte. Pokud můžete, pište tiskacím písmem.

Každá úloha 1. – 4. je hodnocena 0 – 4 body, přitom každá z odpovědí na otázky A, B, C, D přispívá do tohoto počtu nejvýše 1 bodem. Při neúplné nebo nejasné odpovědi přihlíží zkoušející také k celkovému charakteru ostatních odpovědí.

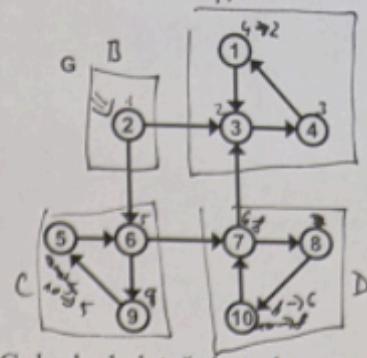
- Primův algoritmus zpracovává graf G_1 , který je kružnicí s n vrcholy, a graf G_2 , který je úplný graf s n vrcholy. Jaký je maximální možný poměr rychlostí zpracování obou grafů? Poměr zdůvodněte a vyjádřete pomocí $O/\Theta/\Omega$ notace.
- Kruskalův algoritmus zpracovává graf G_1 , který je kružnicí s n vrcholy, a graf G_2 , který je úplný graf s n vrcholy. Jaký je maximální možný poměr rychlostí zpracování obou grafů? Poměr zdůvodněte a vyjádřete pomocí $O/\Theta/\Omega$ notace.
- Borůvkův algoritmus zpracovává graf G_1 , který je kružnicí s n vrcholy, a graf G_2 , který je úplný graf s n vrcholy. Jaký je maximální možný poměr rychlostí zpracování obou grafů? Poměr zdůvodněte a vyjádřete pomocí $O/\Theta/\Omega$ notace.
- Vysvětlete, jak je možné zajistit, aby Primův algoritmus našel minimální kostru úplného váženého grafu s n vrcholy v čase $\Theta(n^2)$.

2. Jsou dány jazyky L_1, L_2, L_3 nad abecedou $\{a, b\}$. $L_1 = \{a, ab, abb, abbb, abbbb, abbbbbb, \dots\}$, $L_2 = \{ba, bab, babb, babbb, babbbb, babbbbbb, \dots\}$, $L_3 = \{bba, bbab, bbabb, bbabbb, bbabbbb, bbabbbbbb, \dots\}$.

Dále jsou dány jazyky $K = L_1.L_2.L_3$ (zřetězení jazyků L_1, L_2, L_3) a $L = L_1 \cup L_2 \cup L_3$ (sjednocení jazyků L_1, L_2, L_3).

- Pro dané kladné celé číslo $n > 10$ určete počet slov K , která mají délku n .
- Rozhodněte a zdůvodněte, zda platí $K \subset L$ nebo $L \subset K$.
- Nakreslete přechodový diagram bez ϵ -přechodů automatu A nad abecedou $\{a, b\}$, který přijímá jazyk L .
- Modifikujte automat A tak, aby vznikl automat B , který detekuje v textu nad abecedou $\{a, b\}$ všechna slova jazyka L . Automat B předložte ve formě tabulky, kde řádky odpovídají stavům automatu B a sloupce odpovídají znakům abecedy automatu B . V tabulce vyznačte startovní stav a koncové stavy.

3. Orientovaný graf G na obrázku má 10 vrcholů označených 1, 2, ..., 10. Tarjanův algoritmus zpracovává G a začne ve vrcholu 2. Algoritmus při své činnosti postupuje dopředu do dosud neotevřených vrcholů vždy tak, že pokaždé v určitém vrcholu vybírá jeho sousední vrchol s nejnižším možným označením.



- Kolik silně souvislých komponent obsahuje G ? Označte je velkými písmeny abecedy.
- V jakém pořadí budou detekovány jednotlivé silné komponenty G , pokud algoritmus postupuje podle výše uvedené specifikace?
- Ve kterém okamžiku nebo ve kterých okamžicích činnosti Tarjanova algoritmu nad grafem G bude dodatečná struktura stack definovaná v Tarjanově algoritmu obsahovat největší počet vrcholů?
- Předpokládejme, že funkčnost Tarjanova algoritmu je rozšířená o proceduru, která při každé detekci silně souvislé komponenty projde všechny dosud detekované silně souvislé komponenty v čase úměrném celkovému počtu hran v těchto komponentách. Jaká bude asymptotická složitost výsledného algoritmu za předpokladu, že graf má n vrcholů a m hran?

4. Permutace p množiny $M = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ je bijektivní zobrazení z M na M . Permutaci p zapisujeme ve tvaru $(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$, kde $a_k = p(k)$, pro $0 \leq k < n$.

Martin Jandek

- Určete rank permutace $(2, 1, 3, 0)$. Zdůvodněte svůj výsledek.
- $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ a rank permutace p je 32. Určete p . Zdůvodněte svůj výsledek.
- $M = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$, pro permutaci p množiny M platí: $p = (3, 0, 1, a_3, a_4, \dots, a_{n-1})$, přičemž hodnoty a_3, a_4, \dots, a_{n-1} neznáme. Určete minimální a maximální možný rank p v závislosti na hodnotě n .
- Napište výraz vyjadřující maximální možný počet bitů potřebných k zápisu hodnoty ranku některé permutace množiny $M = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$. Hodnotou výrazu musí být celé číslo. Vysvětlete, jak jste výraz odvodili.